ЦРНОГОРСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ
ГЛАСНИК ОДЈЕЉЕЊА ПРИРОДНИХ НАУКА, 21, 2016.

ЧЕРНОГОРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК И ИСКУССТВ
ГЛАСНИК ОТДЕЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК, 21, 2016

THE MONTENEGRIN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS
PROCEEDINGS OF THE SECTION OF NATURAL SCIENCES, 21, 2016.

UDK 512.643

Ranislav M. Bulatović[*]

O DEKOMPOZICIJI CIRKULACIONIH SISTEMA

Sažetak

Razmotreno je pitanje mogućnosti dekompozicije cirkulacionih sistema sa konačnim brojem stepena slobode. Dati su neophodni i dovoljni uslovi dekompozicije razmatranih sistema na dvodimenzionalne i jednodimenzionalne podsisteme, opisane linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda. Uslovi su formulisani preko polaznih opisnih matrica sistema.

ON THE DECOMPOSITION OF CIRCULATORY SYSTEMS

Abstract

The possibility of the decomposition of circulatory systems is considered. The sufficient and necessary conditions for determining a system to be convertible into two and one-dimensional subsystems are formulated. The conditions are expressed directly in terms of the coefficient matrices of the original system.

1. UVOD

Linearni nekonzervativni neprigušeni mehanički sistemi (cirkulacioni sistemi) sa n stepena slobode opisuje se vektorsko-matričnom diferencijalnom jednačinom drugog reda

$$A\ddot{q} + Bq + Cq = 0\,, \tag{1}$$

[*] Crnogorska akademija nauka i umjetnosti

gdje su: $q \in \Re^n$ – sistem generalisanih koordinata, $\cdot = d/dt$, t – vrijeme, $A \in \Re^{n \times n}$ – matrica kinetičke energije ($A = A^T$), $B \in \Re^{n \times n}$ – matrica cirkulacionih sila ($B = -B^T$), $C \in \Re^{n \times n}$ – matrica potencijalne energije ($C = C^T$). Zbog prirode kinetičke energije matrica A je pozitivno definitna ($A > 0$). Sistemi ovog oblika javljaju se u različitim oblastima fizike i tehnike, kao što su elastičnost, dinamika fluida, dinamika rotora, upravljanje kretanjem, fizika plazme itd [1-5].

Integracija, kao i kvalitativna analiza cirkulacionih sistema postaju znatno jednostavnije ako se opisne matrice sistema A, B i C dovedu istovremeno, posredstvom regularne realne transformacije, na najprostije moguće oblike. U teoriji oscilacija, u slučaju konzervativnog sistema ($B = 0$) široko se primjenjuje postupak njegovog rasprezanja na n podsistema sa jednim stepenom slobode (modalna analiza), odnosno svođenja matrica kinitečke i potencijalne energije na dijagonalne oblike. Sdruge strane, najmanji broj stepena slobode cirkulacionog sistema je 2 i kod takvog sistema sve opisne matrice se mogu transformisati na kanonske oblike: simetrične – dijagonalne, kososimetrična – dvodimenzioni kososimetrični realni blok

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, b \in \Re .$$

U ovom radu, u odjeljku 3, izvedeni su neophodni i dovoljni uslovi rasprezanja cirkulacionih sistema sa proizvoljnim konačnim brojem stepena slobode na podsisteme sa dva, odnosno podsisteme sa dva i jednim stepenom slobode. Uslovi su bazirani na ranijem autorovom rezultatu o istovremenoj redukciji simetrične i kososimetrične matrice na dijagonalni i kvazidijagonalni oblik, respektivno [6]. Posebno je analiziran slučaj rasprezanja sistema sa tri stepena slobode na dva nezavisna podsistema.

2. ISTOVREMENA REDUKCIJA SIMETRIČNE I KOSOSIMETRIČNE MATRICE

Neka je $S \in \Re^{n \times n}$, $S = S^T$ i $K \in \Re^{n \times n}$, $K = -K^T$. Dobro je poznato, da za simetričnu matricu S postoji ortogonalna matrica T, $TT^T = I$, koja se transformacijom kongruencije redukuje na dijagonalni oblik

$$\hat{S} = T^T S T = diag(s_1, s_2, \ldots, s_n). \tag{2}$$

Isto tako, postoji i ortogonalna matrica Q, $QQ^T = I$, koja kososimetričnu matricu K redukuje na kvazidijagonalni oblik (v., npr., [7])

$$\hat{K} = Q^T KQ = diag\left(k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, k_m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0 \right), \tag{3}$$

gdje je $2m = rankK \leq n$. Realni brojevi s_j su sopstvene vrijednosti matrice S, dok spektar kososimetrične matrice K čine parovi oblika $(k_j i, -k_j i), i = \sqrt{-1}$, $k_j \in \Re$ i, eventualno, nule. Matrice (2) i (3) predstavljaju kanonske oblike simetrične i kososimetrične matrice, respektivno.

Sljedeće tvrđenje daje odgovor na pitanje istovremene ortogonalne redukcije matrica S i K na kanonske oblike [6] (v., takođe, [8]).

Teorema 1. *Uslovi*

$$SK^2 = K^2 S \tag{4}$$

i

$$(SK)^2 = (KS)^2 \tag{5}$$

su potrebni i dovaljni za egzistenciju ortogonalne matrice Q takve da je

$$\hat{S} = Q^T SQ = diag(s_1, s_2, \ldots, s_n) \tag{6}$$

i

$$\hat{K} = Q^T KQ = diag\left(k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, k_m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0 \right). \tag{7}$$

Primijetimo da su uslovi (4) i (5) ekvuvalentni uslovima simetričnosti matrica SK^2 i $(SK)^2$.

3. TEOREME O DEKOMPOZICIJI

Zamjenom koordinata $y = A^{1/2} q$, gdje je $A^{1/2}$ pozitivno definitni kvadratni korijen matrice kinetičke energije, jednačina (1) se transformiše na oblik

$$\ddot{y} + \hat{B} y + \hat{C} y = 0, \tag{8}$$

gdje je $\hat{B} = -\hat{B}^T = A^{-1/2} B A^{-1/2}$ i $\hat{C} = \hat{C}^T = A^{-1/2} C A^{-1/2}$. Primjenjujući Teoremu 1 na matrice $\hat{B}$ i $\hat{C}$ direktno slijedi sljedeće tvrđenje.

Teorema 2. *Za egzistenciju realne kongruentne transformacije koja sistem (1) transformiše na $m = rankB/2$ nezavisnih podsistem sa dva stepena slobode*

$$\ddot{x}_{(i)} + b_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x_{(i)} + \begin{pmatrix} c_{2i-1} & 0 \\ 0 & c_{2i} \end{pmatrix} x_{(i)} = 0, \; x_{(i)} \in \Re^2, \; i = 1,\dots,m \tag{9}$$

i $n-2m$ *podsistema sa jednim stepenom slobode*

$$\ddot{x}_{2m+j} + c_{2m+j} x_{2m+j} = 0, \; x_{2m+j} \in \Re, \; j = 1,\dots,n-2m \tag{10}$$

potrebno je i dovoljno da opisne matrice sistema zadovoljavaju sljedeće uslove

$$BA^{-1}BA^{-1}C = CA^{-1}BA^{-1}B \tag{11}$$

$$BA^{-1}CA^{-1}BA^{-1}C = CA^{-1}BA^{-1}CA^{-1}B \tag{12}$$

Kada je $B = 0$ (konzervativni sistem) očigledno su zadovoljeni uslovi (11) i (12). U ovom slučaju je m = 0, pa se Teorema 2 svodi na dobro poznati rezultat, pomenut u uvodu, iz linearne teorije oscilacija. Takođe, lako se direktno provjerava da cirkulacioni sistemi sa dva stepena slobode zadovoljavaju uslove (11) i (12).

Kada su ispunjeni uslovi (11), (12) i $\det B \neq 0$, što je moguće samo u slučaju n = 2m, sistem se raspreže na m podsistema sa dva stepena slobode oblika (9), dok se u slučaju kada je $\det B = 0$ pojavljuju podsistemi sa dva i sa jednim stepenom slobode.

Posledica 1. *Ako je* $BA^{-1}C = CA^{-1}B$ *i* $m = rankB/2$*, sistem (1) se pomoću realne kongruentne transformacije može transformisati na nezavisne podsisteme oblika*

$$\ddot{x}_{(i)} + b_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x_{(i)} + c_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{(i)} = 0, \; x_{(i)} \in \Re^2, i = 1,\dots,m; \tag{13}$$

$$\ddot{x}_{2m+j} + c_{m+j} x_{2m+j} = 0, \; x_{2m+j} \in \Re, \; j = 1,\dots,n-2m. \tag{14}$$

Zaista, ako je $BA^{-1}C = CA^{-1}B$, onda su zadovoljeni uslovi (11) i (12), a u podsistemima (9) mora biti $c_{2i-1} = c_{2i}$, i = 1,…,m.

Razmotrimo podrobnije uslove (11) i (12) za sisteme sa tri stepena slobode (n = 3). Za ove sisteme, uz pretpostavku $B \neq 0$, je $rankB = 2$, pa se, bez umanjenja opštosti, može smatrati da je

$$\hat{B} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ 0 \neq b \in \Re\,,\ \hat{C} = (\hat{c}_{ij})\,, \hat{c}_{ij} = \hat{c}_{ji}\,,\ i, j = 1,2,3. \qquad (15)$$

Sada je

$$\hat{B}^2\hat{C} = -b^2\begin{pmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & \hat{c}_{13} \\ \hat{c}_{21} & \hat{c}_{22} & \hat{c}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

Odavde, očigledno, slijedi da će matrica (16) biti simetrična, tj. da će biti ispunjen uslov (11), samo ako je $\hat{c}_{13} = \hat{c}_{23} = 0$. S druge strane, stavljajući da je $\hat{c}_{13} = \hat{c}_{23} = 0$, dobijamo

$$(\hat{B}\hat{C})^2 = b^2(\hat{c}_{12}^2 - \hat{c}_{11}\hat{c}_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\hat{C}\hat{B})^2\,, \qquad (17)$$

tj., kada je zadovoljen uslov (11) ispunjen je i uslov (12). Time je dokazano sljedeće tvrđenje.

Teorema 3. *Cirkulacioni sistem (1) sa tri stepena slobode može se, posredstvom realne kongruentne transformacije rastaviti na dva nezavisna podsistema ako i samo ako je matrica*

$$P = BA^{-1}BA^{-1}C \qquad (18)$$

simetrična.

Primjer 1. Razmotrimo sistem (1) sa sljedećim opisnim matricama:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 14 \\ -3 & 10 & 3 \\ 14 & 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Prvo, određujemo inverznu matricu matrice kinetičke energije

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

a zatim nalazimo

$$P = BA^{-1}BA^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & -20 & -6 \\ -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

što je, očigledno, simetrična matrica i, u skladu sa Teoremom 3, postoji realna kongruentna transformacija koja sistem (1), (19) razdvaja na dva nezavisna podsistema – jedan sa dva a drugi sa jednim stepenom slobode. Zaista, prvo transformacijom kongruencije pomoću pozitivno definitnog kvadratnog korijena matrice (20)

$$A^{-1/2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

matrice (19) se transformišu na oblike

$$\hat{A} = A^{-1/2}AA^{-1/2} = I\,,\ \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{C} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Karakteristična jednačina $(7\lambda^2 - 3\lambda - 4)\lambda = 0$ sopstvenog problema $\hat{B}^2 X = \lambda \hat{C} X$ ima rješenja $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4/7$ i $\lambda_3 = 0$, a njima odgovarajući sopstveni vektori

$$X^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, X^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ X^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

uzimaju se kao kolone ortogonalne matrice $Q = (X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)})$, pomoću koje se matrice $\hat{B}$ i $\hat{C}$ transformišu kako slijedi

$$Q^T\hat{B}Q = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q^T\hat{C}Q = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Prema tome, zamjenom koordinata $q = A^{-1/2}Qx$, polazni sistem (1), (19) se razdvaja na dva nezavisna podsistema

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \sqrt{2}x_2 - 4x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \sqrt{2}x_1 + 3.5x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

i

$$\ddot{x}_3 + 1.5x_3 = 0. \tag{27}$$

Primjer 2. Neka su:

$$A = I\ ,\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

U ovom slučaju, matrica

$$P = B^2C = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{29}$$

nije simetrična i, prema Teoremi 3, ne postoji realna kongruentna transformacija koja sistem (1), (28) razdvaja na nezavisne podsisteme.

Da u opštem slučaju uslov (11) ne implicira (12), pokazuje slijedeći primjer sistema sa četiri stepena slobode.

Primjer 3. Razmotrimo sitem (1) sa četiri stepena slobode, opisan matricama

$$A = I\ ,\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Za datu matricu B je $B^2 = -I$ pa odmah slijedi

$$B^2C = -C = CB^2, \tag{31}$$

tj. zadovoljen je uslov (11), dok s druge strane ne važi uslov (12), jer matrica

$$(BC)^2 = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

očigledno nije simetrična.

LITERATURA

[1] Д. Р. Меркин, Введение в теорию устойчивости движения. Наука, Москва, 1976.
[2] R. Krechetnikov, J. E. Marsden, Dissipation-induced instabilities in finite dimension. *Reviews of Modern Physics*, 79, 2007, 519-553.
[3] O. N. Kirillov, Nonconservative Stability Problems of Modern Physics, De Gruyter, Berlin/ Boston, 2013.
[4] A. P. Seyranian, A. A. Mailybaev, Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications, World Scientific, Singapore, 2003.
[5] R. M. Bulatovic, On the stability of linear circulatory systems. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik* (*ZAMP)*, 50, 1999, 669-674.
[6] Р. М. Булатович, Одновременое приведение симметрической и кососимметрической матриц к каноническому виду, *Mathematica Montisnigri*, Vol. VIII, 1997,33-36.
[7] R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, 1970.
[8] K. D. Ikramov, On a quasidiagonalizability criterion for real matrices, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 40(1), 2000, 4-17.
[9] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц. Наука, Москва, 1988.